Rycerze i Łotrzy. Ciąg dalszy...

1. Na następnej wyspie każdy powiedział:

   Niektórzy łotrzy na tej wyspie palą.

   Co wiemy o mieszkańcach tej wyspy?

2. Na kolejnej wyspie wszyscy byli tego samego typu i powiedzieli:
   (a) *Jeśli ja palę, to wszyscy mieszkańcy tej wyspy palą.*
   (b) *Jeśli dowolny z mieszkańców tej wsypy pali, to ja palę.*
   (c) *Niektórzy z nas palą, ale ja nie.*

3. Przypuśćmy, że na tej samej wyspie każdy wypowiedział dwa stwierdzenia:
   (a) *Niektórzy z nas palą.*
   (b) *Ja nie palę.*

Metalogika

1. Dlaczego $A \in Cn(X)$ wtw istnieje skończony podzbiór Z zbioru X taki, że $A \in Cn(Z)$?
2. Niech X i Y będą zbiorami formuł zdaniowych języka pierwszego rzędu takimi, że dla każdej formuły B należącej do zbioru Y istnieje co najmniej jedna derywacja tej formuły w oparciu o zbiór X. Przypuśćmy, że A jest formułą zdaniową taką że $A \in Cn(Y)$. Czy w tej sytuacji $A \in Cn(X)$? Uzasadnij odpowiedź.

Semantyka

Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem I rzędu, którego wszystkie stałe pozalogiczne należą do zbioru $\{P_1^1, P_1^2, F_1^1, F_1^2, a_1\}$. Niech $\mathcal{M} = \langle U, \Delta\rangle$ będzie interpretacją języka $\mathcal{L}$ taką, że U jest zbiorem liczb naturalnych oraz:

- $\Delta(P_1^1)$ = zbiór liczb pierwszych,
- $\Delta(P_1^2) = <$ (relacja mniejszości),
- $\Delta(F_1^1) = \mathbf{S}$ (funkcja następnika),
- $\Delta(F_1^2) = *$ (funkcja mnożenia),
- $\Delta(a_1) = 0$ (zero).

1. Oblicz wartości następujących termów przy $\mathcal{M}$-wartościowaniu $\mathbf{s} = \langle 1, 2, 3, 10, 10, 10\ldots\rangle$,
   (a) $F_1^1(x_3)^M[\mathbf{s}]$
   (b) $F_1^1(F_1^1(x_3))^M[\mathbf{s}]$
   (c) $F_1^2(F_1^1(F_1^1(x_3)), F_1^1(x_3))^M[\mathbf{s}]$
   (d) $F_1^2(F_1^1(x_3), F_1^1(a_1))$

2. Sprawdź, czy następujące formuły są spełnione przy interpretacji $\mathcal{M}$ oraz $\mathcal{M}$-wartościowaniu $\mathbf{s} = \langle 1, 2, 3, 10, 10, 10\ldots\rangle$.
   - $\Delta(P_1^1)$ = zbiór liczb pierwszych,
   - $\Delta(P_1^2) = <$ (relacja mniejszości),
   - $\Delta(F_1^1) = \mathbf{S}$ (funkcja następnika),
   - $\Delta(F_1^2) = *$ (funkcja mnożenia),
   - $\Delta(a_1) = 0$ (zero).

   (a) $\mathcal{M} \models P_1^1(x_2)[\mathbf{s}]$
   (b) $\mathcal{M} \models P_1^1(F_1^1(x_1))[\mathbf{s}]$

(c) $\mathcal{M} \models P_1^1(x_1) \vee \neg P_1^1(x_1)[\mathbf{s}]$

(d) $\mathcal{M} \models P_1^2(x_1, a_1) \vee \neg P_1^2(x_1, x_3)[\mathbf{s}]$

(e) $\mathcal{M} \models P_1^2(a_1, a_1) \vee \neg P_1^2(a_1, a_1)[\mathbf{s}]$

(f) $\mathcal{M} \models P_1^1(x_5) \wedge P_1^1(F_1^1(F_1^1(x_5)))[\mathbf{s}]$

3. Zapomnij o $\mathcal{M}$-wartościowaniu $\mathbf{s}$.

(a) Czy $\mathcal{M} \models P_1^1(x_2)$

(b) Czy $\mathcal{M} \models P_1^1(F_1^1(x_1))$

(c) Czy $\mathcal{M} \models P_1^1(x_1) \vee \neg P_1^1(x_1)$

(d) Czy $\mathcal{M} \models P_1^2(x_2, x_3)$

(e) Czy $\mathcal{M} \models \exists x_2 P_1^2(x_2, x_3)$

(f) Czy $\mathcal{M} \models \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2)$

(g) Czy $\mathcal{M} \models \exists x_2 \neg P_1^2(a_1, x_2)$

(h) Czy $\mathcal{M} \models \forall x_2 \exists x_3 P_1^2(x_2, x_3)$