

$$\frac{A \rightarrow \forall x_i B}{A \rightarrow B} O\forall \qquad \frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x_i B} D\forall \qquad \frac{\exists x_i A \rightarrow B}{A \rightarrow B} O\exists$$

$$\frac{A \rightarrow B}{\exists x_i A \rightarrow B} D\exists \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} RO \qquad \frac{A}{A[x_i/\tau]} RP$$

Warunki stosowalności reguł:

- w regule $D\forall$ zmienna x_i nie może występować jako wolna w A ;
- w regule $D\exists$ zmienna x_i nie może występować jako wolna w B ;
- term τ jest podstawialny za x_i do A .

1. Zdefiniuj pojęcie dowodu w systemie aksjomatycznym dla logiki I rzędu.
2. Co to znaczy, że term τ jest podstawialny za zmienną x_i do formuły A ?
3. Zastanów się dlaczego reguł $D\forall$, $D\exists$ nie można używać bez ograniczeń. Co moglibyśmy udowodnić, gdyby reguły te były stosowane bez ograniczeń?
4. Rycerze i Łotrzy. Ciąg dalszy...

- (a) Na następnej wyspie każdy powiedział:

Niektórzy łotrzy na tej wyspie palą.

Co wiemy o mieszkańcach tej wyspy?

- (b) Na kolejnej wyspie wszyscy byli tego samego typu i powiedzieli:

- i. *Jeśli ja palę, to wszyscy mieszkańcy tej wyspy palą.*
- ii. *Jeśli dowolny z mieszkańców tej wyspy pali, to ja palę.*
- iii. *Niektórzy z nas palą, ale ja nie.*

- (c) Przypuśćmy, że na tej samej wyspie każdy wypowiedział dwa stwierdzenia:

- i. *Niektórzy z nas palą.*
- ii. *Ja nie palę.*

5. Wykonaj następujące podstawienia:

- (a) $\forall x_1(P_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2(P_1^2(x_3, x_2) \vee P_1^2(x_2, x_1))) \rightarrow \exists x_3(P_1^1(x_3) \wedge \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2))[x_3/F_1^2(x_3, t)]$
- (b) $\forall x_1(P_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2(P_1^2(x_3, x_2) \vee P_1^2(x_2, x_1))) \rightarrow \exists x_3(P_1^1(x_3) \wedge \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2))[x_1/F_1^2(x_3, t)]$
- (c) $\forall x_1(P_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2(P_1^2(x_3, x_2) \vee P_1^2(x_2, x_1))) \rightarrow \exists x_3(P_1^1(x_3) \wedge \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2))[x_1/x_1]$
- (d) $\forall x_1(P_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2(P_1^2(x_3, x_2) \vee P_1^2(a_1, x_1))) \rightarrow \exists x_3(P_1^1(x_3) \wedge \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2))[a_1/F_1^2(x_2, F_1^1(x_3))]$
- (e) $\forall x_1(P_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2(P_1^2(x_3, x_2) \vee P_1^2(x_2, x_1))) \rightarrow \exists x_1(P_1^1(x_3) \wedge \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2))[x_3/F_1^2(x_8, F_1^1(x_3))]$

6. Podaj przykłady termów (nie)podstawialnych za zmienne x_1, x_2, x_3 .

- (a) $\exists x_1(P_1^2(x_1, x_2) \wedge P_1^2(x_3, x_2)) \rightarrow \forall x_2(P_1^3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P_2^1(x_3))$
- (b) $\exists x_3 \forall x_2(P_1^2(x_1, x_2) \wedge P_1^2(x_3, x_2)) \rightarrow \forall x_3(P_1^3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P_2^1(x_3))$
- (c) $\exists x_2(P_1^2(x_1, x_2) \wedge P_1^2(x_3, x_2)) \rightarrow \forall x_2 \forall x_1(P_1^3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P_2^1(x_3))$
- (d) $\exists x_1(P_1^2(x_1, x_2) \wedge \forall x_3 P_1^2(x_3, x_2)) \rightarrow \forall x_3(\exists x_1 P_1^3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P_2^1(x_3))$

7. Udowodnij następujące formuły:

- (a) $\forall x_1 \forall x_2 A \rightarrow \forall x_2 \forall x_1 A$
- (b) $\exists x_1 \exists x_2 A \rightarrow \exists x_2 \exists x_1 A$