**Definicja 1 (Zbiót $\mathrm{FOR}^{\mathsf{mbC}}$)**

$$A, B :: p_i \mid \neg A \mid \ {\sim} A \mid \ \circ A \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \to B$$

**Definicja 2 (mbC-wartościowanie)** mbC-*wartościowaniem jest funkcja* $v : \mathrm{FOR}^{\mathsf{mbC}} \longrightarrow \{0, 1\}$ *spełniająca następujące warunki:*

1. $v(\neg A) = 1$ *wtw* $v(A) = 0$*;*
2. $v(A \to B) = 1$ *wtw* $v(A) = 0$ *lub* $v(B) = 1$*;*
3. $v(A \wedge B) = 1$ *wtw* $v(A) = 1$ *oraz* $v(B) = 1$*;*
4. $v(A \vee B) = 1$ *wtw* $v(A) = 1$ *lub* $v(B) = 1$*;*
5. *jeżeli* $v({\sim} A) = 0$*, to* $v(A) = 1$*;*
6. *jeżeli* $v(\circ A) = 1$*, to* $v(A) = 0$ *lub* $v({\sim} A) = 0$*.*

**Definicja 3 (System aksjomatyczny dla mbC)**

*(1)* $A \to (B \to A)$ *(2)* $(A \to B) \to (((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
*(3)* $A \to (B \to (A \wedge B))$ *(4)* $(A \wedge B) \to A$
*(5)* $(A \wedge B) \to B$ *(6)* $A \to (A \vee B)$
*(7)* $B \to (A \vee B)$ *(8)* $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
*(9)* $A \vee (A \to B)$ *(10)* $A \vee \neg A$
*(11)* $A \to (\neg A \to B)$ *(12)* $A \vee {\sim} A$
*(13)* $\circ A \to (A \to ({\sim} A \to B))$
***(MP)*** *If* $\vdash_{\mathsf{mbC}} A$ *and* $\vdash_{\mathsf{mbC}} A \to B$*, then* $\vdash_{\mathsf{mbC}} B$

**Definicja 4 (Rachunek sekwentów dla mbC)** *System sekwentowy dla logiki* mbC *zawiera wszystkie reguły systemu* **G3c** *oraz następujące reguły specyficzne:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathbf{L}_{\neg} \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ \mathbf{R}_{\neg}$$

$$\frac{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \chi{\sim} A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{{\sim} A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathbf{L}_{\sim} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \chi{\sim} A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, {\sim} A}\ \mathbf{R}_{\sim}$$

$$\frac{\neg A, \chi\circ A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \neg{\sim} A, \chi\circ A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\circ A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathbf{L}_{\circ} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\circ A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \neg{\sim} A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \circ A}\ \mathbf{R}_{\circ}$$

1. Sprawdź, czy następujące formuły są tautologiami logiki mbC. Jeśli nie, skonstruuj kontrmodel.
   (a) $p \to {\sim}{\sim} p$ (b) ${\sim}{\sim} p \to p$ (c) $\neg p \to {\sim} p$
   (d) ${\sim} p \to \neg p$ (e) $p \vee {\sim} p$ (f) ${\sim}(p \to q) \to p \wedge {\sim} q$
   (g) $\neg(p \to q) \to p \wedge {\sim} q$ (h) ${\sim}(p \wedge {\sim} p)$ (i) $\neg(\neg p \wedge \neg {\sim} p)$
   (j) ${\sim}(p \wedge \neg p)$ (k) $\neg \circ (p \wedge \neg p)$ (l) $\circ p \to (p \to ({\sim} p \to q))$
   (m) $(p \to q) \to ({\sim} q \to {\sim} p)$ (n) $(p \to q) \wedge \circ q \to ({\sim} q \to {\sim} p)$ (o) $({\sim} p \to {\sim} q) \wedge \circ q \to (q \to p)$
   (p) $p \wedge {\sim} p \to {\sim} \circ p$ (r) $\circ p \to {\sim} (p \wedge {\sim} p)$ (s) $(p \wedge {\sim} p) \to ({\sim} p \wedge p)$
   (t) ${\sim}(p \wedge {\sim} p) \to {\sim}({\sim} p \wedge p)$
2. Uzasadnij, że żadna formuła postaci $\circ A$ nie jest twierdzeniem mbC.
3. Uzasadnij, że żadna formuła postaci $\neg {\sim} A$ nie jest twierdzeniem mbC.
4. Podaj przykład formuły $A$ takiej, że ${\sim} A$ jest twierdzeniem mbC.
5. Czy istnieje formuła $A$ taka, że $\neg \circ A$ jest twierdzeniem mbC?