

System aksjomatyczny:

1. Naucz się aksjomatów KRZ razem z ich nazwami.
2. Reguła Podstawiania: pamiętaj, że podstawia się wyłącznie za zmienne.
3. Wykonaj (jeżeli to możliwe) następujące podstawienia:

(a) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow p) [\neg p/(q \rightarrow p)] =$

(b) $\neg(t \vee s) \rightarrow \neg s [s/(p \rightarrow q), t/r] =$

(c) $p \rightarrow (q \rightarrow p) [p/(q \rightarrow p), q/p] =$

(d) $\neg(t \vee s) \rightarrow \neg s [\neg s/(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))] =$

4. Opisz wiersze podanego niżej dowodu formuły $p \leftrightarrow p$.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

3. $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$

4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$

5. $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$

6. $p \rightarrow p$

7. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$

8. $(p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow p))$

9. $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow p)$

10. $p \leftrightarrow p$

5. Uzupełnij dowód formuły w systemie aksjomatycznym KRZ.

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Ax. 1
2.	$[(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))] \rightarrow$ $\rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))]$	
3.	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	Ax. 2
4.		RO: 2,3
5.		RP: 3, $p/(q \rightarrow r)$, $q/(p \rightarrow (q \rightarrow r))$, $r/((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
6.	$((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$	RO: 5,4
7.		RP: 1, $p/(q \rightarrow r)$, q/p
8.		RO: 6,7

6. Uzupełnij dowód formuły $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$. (Ściśle rzecz biorąc, jest to derywacja tejże formuły ze zbioru zawierającego trzy tezy wymienione w wierszach 2., 3. i 5.)

1.	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Ax.12.
2.	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	teza 66.
3.	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$	teza 25.
4.	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	Ax.13.
5.	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$	teza 24.
6.	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$	Ax.14.
7.	$(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q)$	
8.		RO: 7, 2
9.		RP: 3 $p/p \wedge q, q/\neg p \vee \neg q$
10.	$\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q$	
11.	$(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$	
12.		RO: 11, 2
13.	$(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))$	RP: 5 $p/\neg p \vee \neg q, q/p \wedge q$
14.		RO: 13, 12
15.	$(p \wedge q \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)) \rightarrow ((\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)))$	
16.	$(\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))$	RO: 15, 14
17.	$p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$	

7. Udowodnij prawo wyłączonego środka $(p \vee \neg p)$ przy pomocy następujących tez:

1. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
2. $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
3. $\neg(p \wedge \neg p)$

8. Udowodnij tezę $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$ przy pomocy następujących aksjomatów:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ Ax. 3
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$ Ax. 8
3. $p \rightarrow p \vee q$ Ax. 9
4. $q \rightarrow p \vee q$ Ax. 10