Semantyka dla INT

Logika klasyczna

$\bot$ jest zawsze fałszywe	
$A \wedge B$ jest prawdziwe	A jest prawdziwe oraz B jest prawdziwe
$A \vee B$ jest prawdziwe	A jest prawdziwe lub B jest prawdziwe
$A \rightarrow B$ jest prawdziwe	A jest fałszywe lub B jest prawdziwe
$\exists x A$ jest prawdziwe	istnieje a_1 takie, że $A(x/a_1)$ jest prawdziwe
$\forall x A$ jest prawdziwe	dla każdego a_1 jest tak, że $A(x/a_1)$ jest prawdziwe

Intuicjonizm

nie istnieje dowód $\bot$	
a jest dowodem $A \wedge B$	$a = (a_1, a_2)$; a_1 jest dowodem A; a_2 jest dowodem B
a jest dowodem $A \vee B$	$a = (a_1, a_2)$; $a_1 = 0$ i a_2 jest dowodem A lub $a_1 = 1$ i a_2 jest dowodem B
a jest dowodem $A \rightarrow B$	a jest konstrukcją (funkcją), która przekształca każdy dowód a_1 formuły A w dowód $a_2(a_1)$ formuły B
a jest dowodem $\exists x A$ (w dziedzinie D)	$a = (a_1, a_2)$; $a_1 \in D$; a_2 jest dowodem tego, że $A(x/a_1)$
a jest dowodem $\forall x A$ (w dziedzinie D)	a jest konstrukcją (funkcją), która przekształca dowód tego, że $a_1 \in D$ w dowód tego, że $A(x/a_1)$

Teoria dowodu dla INT

Nowe narzędzie: rachunek sekwentów dla intuicjonizmu - system **G3i**. *Sekwent ma postać $\Gamma \Rightarrow C$, gdzie Γ jest multizbiorem formuł, a C* ***pojedynczą*** *formułą. Tak jak w przypadku* **G3c**, *s jest nowym termem, zaś t dowolnym termem.*

$$A \Rightarrow A \ (ax) \qquad \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ \bot$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}\ L_\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ R_\wedge$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R_{\vee_1} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R_{\vee_2}$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}\ L_\vee$$

$$\frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C}\ L_\rightarrow \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}\ R_\rightarrow$$

$$\frac{A(x/t), \forall x A, \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C}\ L_\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(x/s)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}\ R_\forall$$

$$\frac{A(x/s), \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow C}\ L_\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(x/t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}\ R_\exists$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ cut$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}\ L_{ctr}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}\ L_{wk}$$

1. Rozważ poniższe formuły. Czy są one tautologiami w logice intuicjonistycznej? (pamietaj o definicji $\neg A =_{df} A \rightarrow \bot$)
   (a) $p \vee \neg p$
   (b) $\neg p \vee \neg\neg p$
   (c) $\neg\neg(p \vee \neg p)$
   (d) $\neg(p \wedge \neg p)$
   (e) $p \rightarrow \neg\neg p$
   (f) $\neg\neg p \rightarrow p$
   (g) $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$
   (h) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
   (i) $\neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$
   (j) $\neg\forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$
   (k) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
   (l) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$
   (m) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
   (n) $\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. Jaką inną niż obecna formę, możemy nadać aksjomatowi, żeby reguła L_{wk} była zbędna?
3. Czy reguła L_{ctr} jest niezbędna w **G3i**?