część zadań pochodzi z książki B. Stanosz *Ćwiczenia z logiki*

1. Pod pojęciem n-argumentowej ($n \geqslant \mathbf{1}$) funkcji prawdziwościowej rozumiemy funkcję n zmiennych przebiegających zbiór $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ i o wartościach należących do zbioru $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Które z poniższych zbiorów są funkcjami prawdziwościowymi? Uzasadnij odpowiedzi.

   (a) $R_1 = \{\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle\}$
   (b) $R_2 = \{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle\}$
   (c) $R_3 = \{\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle\}$
   (d) $R_4 = \{\langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{0}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle\}$
   (e) $R_5 = \{\langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle\rangle\}$
   (f) $R_6 = \{\langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{0}\rangle\}$
   (g) $R_7 = \{\langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{0}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{0}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{0}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{0}\rangle\}$
   (h) $R_8 = \{\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle\}$
   (i) $R_9 = \{\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{0}\rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle\}$
   (j) $R_{10} = \{\langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \mathbf{1}\rangle, \langle\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle, \mathbf{0}\rangle\}$

2. Podaj liczbę wszystkich jednoargumentowych oraz dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych w KRZ. Ile można zatem zdefiniować różnych jedno- i dwuargumentowych spójników w języku KRZ?

   Czy potrafisz podać liczbę wszystkich k-argumentowych funkcji prawdziwościowych zdefiniowanych przy użyciu n wartości logicznych?

3. Wróćmy do dwuwartościowej logiki klasycznej. Zbuduj matryce logiczne wszystkich funktorów prawdziwościowych, jedno- i dwuargumentowych.

4. Jeśli przy pomocy spójników pewnego języka formalnego można wyrazić każdą funkcję prawdziwościową, to zbiór owych spójników nazywamy adekwatnym (lub funkcyjnie kompletnym). Ponieważ funkcje prawdziwościowe charakteryzują semantyczne własności spójników ekstensjonalnych, możemy, zamiast o określaniu funkcji prawdziwościowych, mówić o definiowaniu spójników. Np., definicja spójnika $\wedge$ za pomocą spójników $\vee$ i $\neg$ wygląda następująco:
$$A \wedge B =_{df} \neg(\neg A \vee \neg B)$$
   Zdefiniuj (symbol $\veebar$ oznacza alternatywę rozłączną, symbol $\uparrow$ stałą Sheffera, $\downarrow$ to binegacja):

   (a) $\vee$ za pomocą $\neg$ i $\wedge$
   (b) $\rightarrow$ za pomocą $\neg$ i $\vee$
   (c) $\veebar$ za pomocą $\neg$ i $\leftrightarrow$
   (d) $\rightarrow$ za pomocą $\neg$ i $\wedge$
   (e) $\leftrightarrow$ za pomocą $\rightarrow$ i $\wedge$
   (f) $\neg$ za pomocą $\uparrow$
   (g) $\neg$ za pomocą $\downarrow$
   (h) $\wedge$ za pomocą $\uparrow$
   (i) $\wedge$ za pomocą $\downarrow$
   (j) $\vee$ za pomocą $\downarrow$
   (k) $\vee$ za pomocą $\uparrow$

5. Spójnik odwrotnej implikacji ($\leftarrow$) jest opisywany następującą tabelą prawdziwościową:

A	B	$A \leftarrow B$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

   Zdefiniuj go przy pomocy spójnika binegacji ($\downarrow$).